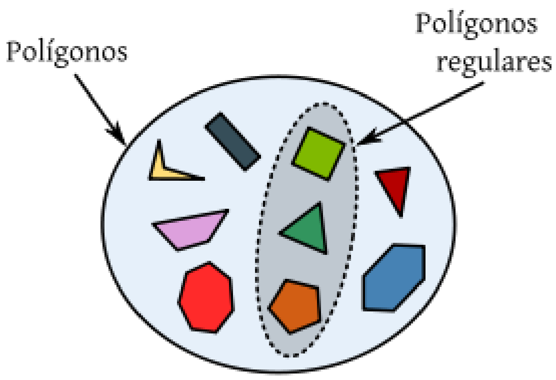
WIKIPEDIA

Operaciones con conjuntos

En las matemáticas, podemos definir a un conjunto como una colección desordenada de objetos, los objetos de un conjunto pueden ser cualquier cosa siempre que tengan una relación entre ellos, a los objetos de un conjunto se les llama *elementos* o *miembros* de dicho conjunto, por lo tanto un conjunto contiene a sus elementos. Se representan con una letra mayúscula y a los elementos o miembros de ese conjunto se les mete entre llaves corchetes o parentesis. ({,}).



Esta es la representación gráficade un conjunto, en este caso tratamos el conjunto de los polígonos, dentro de este hay multitud de elementos (todos los polígonos), pero hay un conjunto perteneciente al anterior que es el conjunto de polígonos regulares.

Dos conjuntos se pueden combinar de muchas maneras distintas, por ejemplo, teniendo un conjunto de la gente que juega al fútbol y otro de la gente que juega a baloncesto podemos hacer muchas combinaciones como el conjunto de personas que juegan a fútbol o baloncesto, las que juegan a fútbol y baloncesto, las que no juegan a baloncesto, etc.

Por lo tanto vamos a ver las distintas operaciones que hay en los conjuntos:

Índice

Unión

El símbolo de esta operación es:∪.

Es correspondiente la unificación de los elementos de dos conjuntos o incluso más conjuntos, que pueden partiendo de esto conformar una nueva forma de conjunto, en la cual los elementos dentro de este correspondan a los elementos de los conjuntos originales. Cuando un elemento es repetido, forma parte del conjunto unión una vez solamente; esto difiere de la unión de conjuntos en la concepción tradicional de la suma, en la cual los elementos comunes se consideran tantas veces como se encuentren en la totalidad de los conjuntos.

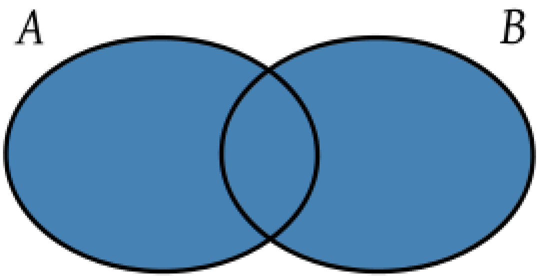


Diagrama de Venn de la unión de dos conjuntos **A ∪ B**

Sean **A** y **B** dos conjuntos, la unión de ambos (**A ∪ B**) es el conjunto **C** el cual contiene a todos los elementos pertenecientes al conjunto **A** y al conjunto **B**.

Un elemento x pertenece a la unión de los conjuntos **A** y **B** si, y sólo si, x pertenece al conjunto **A** o x pertenece al conjunto **B**, por lo tanto $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Ejemplos

En el Diagrama de Venn que se muestra en la imagen de la derecha se puede observar como es de forma gráfica, a continuación pondré también algunos ejemplos prácticos:

1. Ejemplo: La unión de los conjuntos A={1,2,3} y B={2,4,6} sería el conjunto C={1,2,3,4,6}, esto es: {1,2,3}∪{2,4,6}={1,2,3,4,6}
2. Ejemplo: La unión de personas que juegan al fútbol y de personas que juegan al baloncesto serían las personas que juegan a fútbol o baloncesto.

Intersección

El símbolo de esta operación es:∩.

Sean **A** y **B** dos conjuntos, la intersección de ambos (**A ∩ B**) es el conjunto **C** el cual contiene los elementos que están en **A** y que están en **B**.

Un elemento x pertenece a la intersección de los conjuntos **A** y **B** si, y sólo si, x pertenece al conjunto **A** y x pertenece al conjunto **B**, por lo tanto $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$

Ejemplos

En el Diagrama de Venn que se muestra en la imagen de la derecha se puede observar como es de forma gráfica, a continuación pondré también algunos ejemplos prácticos:

1. Ejemplo: La intersección de los conjuntos A={1,2,3} y B={2,4,6} sería el conjunto C={2}, esto es: {1,2,3}∩{2,4,6}={2}
2. Ejemplo: La intersección del conjunto de números pares y el conjunto de números impares sería el conjunto C={∅} o sea no sería ningún número. Por lo tanto se dice que estos dos conjuntos son **disjuntos**.
3. Ejemplo: La intersección de personas que juegan al fútbol y de personas que juegan al baloncesto serían las personas que juegan a fútbol y a baloncesto a la vez.

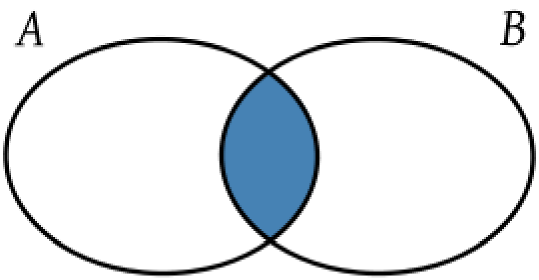


Diagrama de Venn que muestra la intersección de dos conjuntos **A** ∩ **B**

Disjuntividad

Se dice que dos conjuntos **A** y **B** son disjuntos cuando la **intersección** de ambos es el conjunto vacío. **A** ∩ **B**= **{∅}**

Ejemplos

1. Ejemplo: La intersección del conjunto de números pares y el conjunto de números impares sería el conjunto C={∅} o sea serían disjuntos.
2. Ejemplo: La intersección del conjunto de personas que juegan a baloncesto y el conjunto de personas que juegan a fútbol es el conjunto vacío, osea serían disjuntos.
3. Ejemplo: La intersección de A={3,7,8} y B={1,2,9} sería C={∅}, ya que {3,7,8}∩{1,2,9}={∅} por lo tanto A y B son disuntos.

Diferencia

El símbolo de esta operación es:\.

La diferencia consiste en eliminar de **A** todo elemento que esté en **B**, también se puede denotar con el símbolo de la resta **A-B**, por lo tanto, la diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto C que tiene a todos los elementos que están en A, pero no en B.

También se le puede llamar a la diferencia de A y B: *complementario de B con respecto a A*.

Por lo tanto, un elemento pertenece a la diferencia de A y B si, y sólo si $\{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

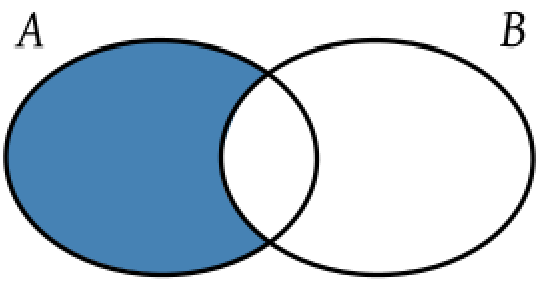


Diagrama de Venn que muestra la diferencia de dos conjuntos **A \ B**

Ejemplos

1. Ejemplo: La diferencia de los conjuntos {1,2,3,4} y {1,3,5,7} es el conjunto {2,4}, sin embargo la diferencia de los conjuntos {1,3,5,7} y {1,2,3,4} es el conjunto {5,7}.
2. Ejemplo: La diferencia del conjunto de las personas que juegan al fútbol y el conjunto de las personas que juegan a baloncesto es el conjunto de las personas que solo y exclusivamente juegan al fútbol.

Complemento

El símbolo de esta operación es: A^{C}, o también se suele representar con el símbolo $\overline{A}$

Supongamos que **U** es el conjunto universal, en el cual se encuentran todos los elementos posibles, entonces el complementario de **A** con respecto a **U** se consigue restando a **U** todos los elementos de **A**. $\overline{A}$**=U-A**

Por lo tanto, un elemento pertenece al complementario de A si, y sólo si $A^c = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$

Ejemplos

1. Ejemplo: El complementario del conjunto de números pares es el conjunto de números impares.
2. Ejemplo: El complementario del conjunto de personas que juegan a fútbol es el conjunto de personas que no lo juegan.
3. Ejemplo: El complementario del conjunto de todos los números positivos mayores de 5, incluyendo el 5, es el conjunto {1,2,3,4}

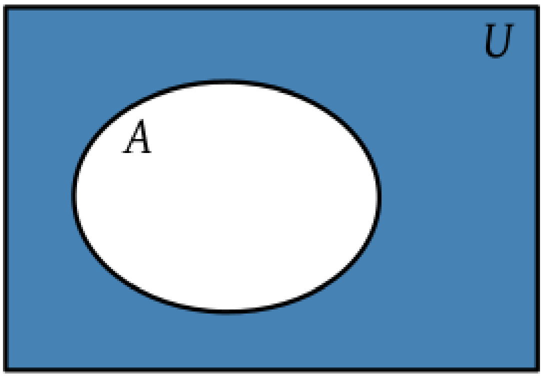


Diagrama de Venn que muestra el complemento de un conjunto $\overline{\mathbf{A}}$

Diferencia simétrica

El símbolo de esta operación es: Δ.

La diferencia simétrica de dos conjuntos *A* y *B* es otro conjunto el cuál posee los elementos que o bien se encuentran en A, o bien se encuentran en B, pero no en los dos a la vez.***A* Δ *B* = C**, donde C no tiene

1. Ejemplo: La diferencia simétrica del conjunto de personas que juegan a fútbol y el conjunto de personas que juegan a baloncesto es el conjunto de personas que juegan sólo a fútbol y sólo a baloncesto, pero no que jueguen a ambos a la vez.

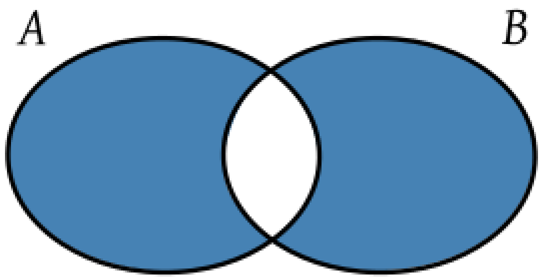


Diagrama de Venn que muestra la diferencia simétrica de dos conjuntos **A Δ B**

Producto cartesiano

En un conjunto los elementos están desordenados y el orden es muy importante, por ello necesitamos algún tipo de estructura diferente para representar a los elementos ordenados, de ahí salen las **n-tuplas ordenadas**.

La **n-tupla ordenada** $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ es la colección ordenada dónde su primer elemento es (a_1), (a_2) es su segundo elemento, ... y (a_n) el elemento n-ésimo.

Se puede decir que dos n-tuplas ordenadas son iguales si, y sólo si, cada elemento numerado de cada par es igual, osea, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ = $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ esto sucede si, y sólo si (a_i)=(b_i) para *i*= 1,2,3,...,n. Las 2-tuplas se llaman **pares ordenados** (a,b) y (c,d), estos son iguales si, y sólo si $a=c$ y $b=d$.

Ahora haciendo referencia al producto cartesiano de dos conjuntos:

El símbolo de esta operación es: ×

El producto cartesiano de dos conjuntos **A** y **B** es el conjunto **C**, C = *A* × *B*, donde los pares ordenados (a,b) están formados por un primer elemento perteneciente a **A** y un segundo elemento perteneciente a **B**.

$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplos

1. Ejemplo: El producto cartesiano de A={2,3} y B={a,b,c} es A×B={(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)}

Principio de inclusión-exclusión

Es la generalización del resultado de las uniones de un número arbitrario de conjuntos, es una técnica muy importante que se usa principalmente en los problemas de enumeración.

Sucede por ejemplo cuando queremos encontrar un cardinal de la unión de dos conjuntos y para encontrar dicho número de la unión de dos conjuntos finitos A y B, hay que tener encuenta que en A∪B cada elemento de A está solo una vez en A, pero no en B, y viceversa, pero hay algunos elementos que pueden pertenecer a A y a B a la vez, por lo tanto el **principio de inclusión-exclusión**se basa en restar a la unión de dos conjuntos finitos la intersección de ambos.

Matemáticamente:**A∪B - A∩B**

Identidad

En matemáticas, una identidad es cuando dos objetos que aparentemente son distintos por la forma en la que se representan, al final son lo mismo. Por lo tanto, una identidad es una igualdad entre dos expresiones, entre los conjuntos existen una serie de leyes de identidades, que les muestro a continuación:

Leyes de identidad

- **A ∪ ∅** = **A**, la unión de un conjunto cualquiera con el conjunto vacío es el mismo conjunto.
- **A** ∩ **U** = **A**, la intersección de un conjunto cualquiera con el conjunto universal es el mismo conjunto.

Leyes de dominación

- **A ∪ U = U**, la unión de un conjunto cualquiera con el conjunto universal, es el conjunto universal.
- **A** ∩ **∅ = ∅**, la intersección de un conjunto cualquiera con el conjunto vacío, es el conjunto vacío.

Leyes idempotentes

- **A ∪ A = A**, la unión de un conjunto cualquiera consigo mismo, es el mismo conjunto.
- **A** ∩ **A = A**, la intersección de un conjunto cualquiera consigo mismo, es el mismo conjunto.

Ley de complementación

- $\overline{A}$, la negación de la negación de un conjunto cualquiera, es el mismo conjunto.

Leyes conmutativas

- **A ∪ B = B ∪ A**
- **A** ∩ **B = B** ∩ **A**

Leyes asociativas

- **A ∪ (B∪C) = (A∪B) ∪ C**
- **A** ∩ **(B**∩**C) = (A**∩**B)** ∩ **C**

Leyes distributivas

- **A** ∩ **(B∪C) = (A**∩**B) ∪ (A**∩**C)**
- **A ∪ (B**∩**C) = (A∪B)** ∩ **(A∪C)**

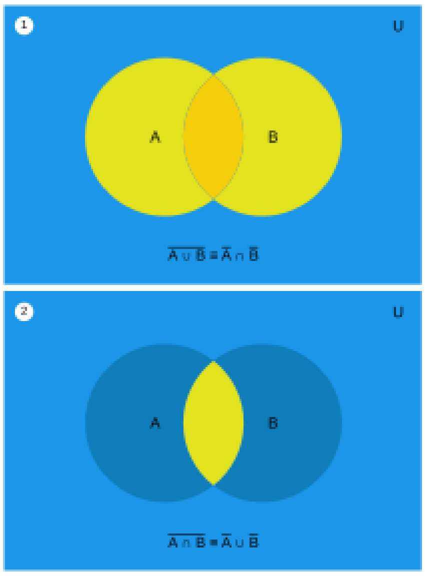
Leyes de De Morgan

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

La forma generalizada es:

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \equiv \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$
$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \equiv \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

donde *I* es un conjunto indexado, posiblemente incontable.



Representación gráfica de las leyes de De Morgan

Leyes de absorción

- **A ∪ (A∩B) = A**
- **A ∩ (A∪B) = A**

Leyes de complemento

- **A ∪ $\overline{A}$ = U**, la unión de un conjunto cualquiera con su complementario, es el conjunto universal.
- **A ∩ $\overline{A}$ = ∅**, la intersección de un conjunto cualquiera con su complementario, es el conjunto vacío.

Uniones e intersecciones generalizadas

Las operaciones de **unión** y de **intersección** tienen la propiedad asociativa, por lo tanto si tenemos tres conjuntos **A**, **B** y **C**...

La **unión** de esos tres conjuntos es otro conjunto D el cuál contiene todos aquellos elementos que están al menos en uno de los conjuntos A, B o C. (**A∪B∪C**)

Un elemento x pertenece a la unión de los conjuntos **A**, **B** y **C** si, y sólo si, x pertenece al conjunto **A** o x pertenece al conjunto **B** o x pertenece al conjunto **C**, por lo tanto: $A \cup B \cup C = \{x/x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$

La **intersección** de los conjuntos A, B y C queda como resultado otro conjunto D el cuál tiene los elementos que están estrictamente en A, en B y en C. (**A∩B∩C**)

Un elemento x pertenece a la intersección de los conjuntos **A**, **B** y **C** si, y sólo si, x pertenece al conjunto **A**, x pertenece al conjunto **B** y x pertenece al conjunto **C**, por lo tanto: $A \cap B \cap C = \{x/x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$

Ejemplos

1. Ejemplo: La unión del conjunto de personas que juegan al fútbol, el conjunto de personas que juegan al baloncesto y el conjunto de personas que juegan a tenis, es el conjunto de personas que juegan a uno o más de los tres deportes citados; sin embargo, la intersección de esos tres conjuntos sería el conjunto de personas que juegan a lo tres deportes.
2. Ejemplo: Sea A={2,4,6,20}, B={1,7,13,20} y C={0,5,20}, la unión de A, B y C es el conjunto D={0,1,2,4,5,6,7,13,20} y la intersección de A, B y C es el conjunto D={20}

Véase también

- Diagrama de Venn
- Conjunto

Notas

- ∪ (Símbolo de intersección)
- ∩ (Símbolo de unión)
- ∅ (Vacío)
- A^C (Complemento)
- $\overline{A}$ (Sobrerrayado)
- Δ (Diferencia simétrica)

Referencias

Bibliografía

- Rosen, Kenneth H. Matemáticas Discretas y sus Aplicaciones. (en inglés)

Enlaces externos